Обобщённая логистическая модель динамики популяций

Житомирский национальный агроэкологический университет

аспирант Маевский А. В.

Руководитель: заведующий кафедрой мониторинга окружающей природной среды ЖНАЭУ, доцент, доктор технических наук Пилькевич И. А.

Анализ математических моделей

- Как известно модель динамики популяций Лотки-Вольтерра имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0} \qquad (1)$$

- Разработанная обобщенная модель динамики популяций имеет вид нелинейного дифференциального уравнения:

$$(1 + a_1 N)\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0} \qquad (2)$$

- N – количество особей в популяции; φ - потенциал экспоненциального роста ; a_0, a_1 – параметры потерь, которые сдерживают экспоненциальный рост популяций.
- Сравнительный анализ (1) и (2) показывает, что уравнение (2) отличается от уравнения Ферхюльста (1) наличием нелинейного элемента

$$a_1 N \quad \frac{dN}{dt}$$

- Дискретные логистические модели динамики популяций (2) и (1) можно представить в рекуррентной форме, соответственно:

$$N_{k+1} = \left[1 + \varphi_0\left(\frac{1}{1 + a_1 N_k} - \frac{N_k / b_0}{1 + a_1 N_k}\right)\right] N_k \qquad (4)$$

$$N_{k+1} = \left[\left(1 + \varphi_0\right) - a_0 N_k\right] N_k$$

- При больших значениях емкости $b_0 \to \infty$ логистическая функция (4) вырождается в дискретную экспоненциальную функцию

$$N_{k+1} = \left(1 + \varphi_0 \frac{1}{1 + a_1 N_k}\right) N_k \qquad (5)$$

- При больших значениях $a_1 N >> 1$ экспоненциальная функция (4) вырождается в линейную функцию вида $N_{k+1} = N_k + \varphi_0 / a_1$
- Анализ (4) показывает, что для построения математической модели динамики популяции конкретного вида необходимо экспериментально определить параметры модели φ_0, a_1 и b_0.

Значения рабочих параметров моделей динамики популяций основных видов охотничьих животных

Вид копытного животного	Количество особей N, шт.	Параметр		
	2008 год	a_1	φ	b_0
Олень	19610	$-5{,}88\cdot10^{-5}$	$1{,}628\cdot10^{-2}$	16981,903
Кабан	53084	$-2{,}47\cdot10^{-5}$	$3{,}95\cdot10^{-2}$	40454,979
Косуля	136441	$-8{,}15\cdot10^{-6}$	$3{,}192\cdot10^{-3}$	123657,8
Лань	3383	$-4{,}41\cdot10^{-4}$	$2{,}62\cdot10^{-2}$	2260,729

Анализ данных таблицы показывает, что произведение $a_1 N << 1$.Это позволяет обобщенное логистическое уравнение динамики популяций

$$\left(1 + a_1 N\right)\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0} \qquad (2)$$

записать в следующем виде: $$\frac{dN}{dt} \approx \varphi N - \frac{N^2}{a_0} \qquad (2^*)$$

Оценка адекватности математических моделей динамики популяций

- Обычно при оценке адекватности математических моделей используют неравенство Чебышева [4]:

$$P\left(\left|X - M_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - D_x / \varepsilon^2$$

где X – произвольная случайная величина;

M_x и D_x – ее математическое ожидание и дисперсия;

$\varepsilon > 0$ – произвольное вещественное число.

$P\left(\left|X - M_x\right| < \varepsilon\right)$ означает вероятность того, что отклонение случайной величины X от своего математического ожидания M_x меньше погрешности ε. Использование упомянутой погрешности позволяет не накладывать строгих ограничений типа выбора конкретного закона распределения случайной величины X.

- Для оценки адекватности логистических моделей в работе предлагается использовать относительные и абсолютные погрешности:

$$l = \Sigma \left| y_i - Y_i \right| / n$$

$$\delta = \left(l \big/ Y \right) \cdot 100\,\%,$$

где y_i – количество особей в популяциях, рассчитанное с помощью логистических моделей;

Y_i – статистические данные о количестве особей в популяциях соответствующих видов копытных животных.

Заключение

- Оценка адекватности логистических моделей показала, что точность расчетов сделанных по обобщенной модели динамики популяций превышает точность расчетов сделанных по модели Лотки-Вольтерра примерно в 57 раз ($4{,}2\% / 7{,}38 \cdot 10^{-2}\%$). Это дает основание утверждать то, что при оптимизации использования и возобновления животного мира с целью экономного управления охотничьими хозяйствами Украины целесообразно применять обобщенную логистическую модель динамики популяций.

Использованная литература

- 1. Пількевич І.А. Математичне моделювання динаміки популяцій: монографія / І.А.Пількевич. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 87 с.
- 2. Маєвський А.В. Теоретичне обґрунтування моделі динаміки популяцій Лоткі-Вольтерра / А.В.Маєвський, І.А.Пількевич // Вісник ЖДТУ, вип. №3(54). – Житомир: ЖДТУ, 2010. – С. 79-83.
- 3. Пилькевич И.А., Маевский А.В. Мониторинг копытных животных, обитающих в охотничьих хозяйствах Украины / И.А.Пилькевич, А.В.Маевский // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №5/4 (47). – С. 35-40.
- 4. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж.Бендат, Л.Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
- 5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
- 6. Тарасова В.В. Екологічна статистика (з блочно-модульною формою контролю знань): підручник / В.В.Тарасова. –К.: Центр уч. літ-ри, 2008. – 392 с.